Chapitre III : Nombres Réels

Rédigé par Samy Youssoufine

7 janvier 2026

University Mohammed VI Polytechnic
EMINES School of Industrial Management

Table des matières

1 Borne supérieure et inférieure

Définition 1.1.0.1

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Un réel M est une **borne supérieure** de A si :
$$\forall x \in A, x \leq M$$
- Un réel m est une **borne inférieure** de A si :
$$\forall x \in A, x \geq m$$

On peut aussi dire que A est **majorée** (resp. **minorée**) si elle admet une borne supérieure (resp. inférieure).

Remarque 1.1.0.1

A est bornée si elle est majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe deux réels m et M tels que :
$$\forall x \in A, m \leq x \leq M$$

Exemple 1.1.0.1

1. Soit $A = \frac{n^2}{n+1}, n \in \mathbb{N}$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n^2}{n+1} \geq 0$. Donc A est minorée par $m = 0$. On a aussi quand $n \to +\infty$: $\frac{n^2}{n+1} \to +\infty$. Donc A n'est pas majorée.
2. Soit $B = 1 + \frac{(-1)^n}{n+1}, n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}, |1 + \frac{(-1)^n}{n+1}| \leq 2$. Donc B est bornée.

Théorème 1.1.0.1 ***(Axiome de la borne supérieure)***

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (le plus petit réel majorant), noté $\sup(A)$.

Remarque 1.1.0.2

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit $M = \sup(A)$. Alors :

$$\begin{cases} \forall x \in A, x \leq M \\ \forall \alpha \text{ majorant de } A, M \leq \alpha \end{cases}$$

Propriété 1.1.0.1 *(Caractérisation de la borne supérieure)*

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit $\beta = \sup(A)$ (1). Alors :

$$(2) \begin{cases} \forall a \in A : a \leq \beta \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a_\epsilon \in A : a_\epsilon > \beta - \varepsilon \end{cases} \iff (3) \begin{cases} (\text{caractérisation séquentielle}) \forall a \in A : a \leq \beta \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \to \beta (n \to +\infty) \end{cases}$$

Preuve

On va montrer que (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3).
Pour cela, on va montrer que (1) $\implies$ (2), (2) $\implies$ (3) et (3) $\implies$ (1).

- (1) $\implies$ (2) :
  β est un majorant de A, donc $\forall a \in A : a \leq \beta$.
  Donc : $\forall \varepsilon > 0 : \beta - \epsilon < \beta$. Or β est le plus petit majorant de A.
  Donc : $\beta - \epsilon$ n'est pas un majorant de A, car β est le plus petit majorant de A.
  Donc : $\exists a_\epsilon \in A : a_\epsilon > \beta - \varepsilon$.
- (2) $\implies$ (3) :
  Soit $\varepsilon = \frac{1}{n+1} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$.
  Donc : $\exists a_n \in A : \beta - \frac{1}{n+1} < a_n < \beta$.
  Donc : $\lim_{n \to +\infty} \beta - \frac{1}{n+1} = \beta$ et $lim_{n \to +\infty} \beta = \beta$, donc par gendarmes : $a_n \to \beta (n \to +\infty)$.
- (3) $\implies$ (1) :
  Soit α un majorant de A. Or d'après (3), $\exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \to \beta (n \to +\infty)$.
  Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \alpha$.
  Donc par passage à la limite : $\beta \leq \alpha$. Donc β est le plus petit majorant de A. Donc $\beta = \sup(A)$.

■

Exemple 1.1.0.2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On pose $a_n = a + \frac{n}{n+1}(b-a)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
On a : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq a$.
On a aussi : $\forall n \in \mathbb{N}, b - a_n = b - (a + \frac{n}{n+1}(b-a)) = \frac{b-a}{n+1} > 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < b$.
Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq a_n < b$.
Or : $\lim_{n \to +\infty} a_n = a + (b-a) = b$. Donc par la caractérisation spécifique de la borne supérieure, on en déduit que : $\sup(a_n, n \in \mathbb{N}) = b$.

Propriété 1.1.0.2

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Si β est un majorant de A tel que $\beta \in A$, alors $\beta = \sup(A)$ et dans ce cas, β est appelé le **maximum** de A, noté $\max(A)$.

Preuve

On prend $(a_n)_n$ une suite constante égale à β. Donc $a_n \to \beta \quad (n \to +\infty)$. Donc par la caractérisation spécifique de la borne supérieure, on en déduit que : $\sup(A) = \beta$. Donc β est le maximum de A. ■

Exercice 1.1.0.1

Soit $A = \{(-1)^n \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$. Déterminer $\sup(A)$.
Solution : On a : $\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n \frac{n}{n+1} \leq 1$. Donc A est majorée par $M = 1$ (que n soit pair ou impair...).
On a aussi : $\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n \frac{n}{n+1} \geq -1$. Donc A est minorée par $m = -1$.
Donc A est bornée.
On a : $\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^{2n} \frac{2n}{2n+1} < 1$.
Or : $\lim_{n \to +\infty} (-1)^{2n} \frac{2n}{2n+1} = 1$. Donc par la caractérisation spécifique de la borne supérieure, on en déduit que : $\sup(A) = 1$. En revanche, $1 \notin A$, donc A n'admet pas de maximum.

Théorème 1.1.0.2 *(Axiome de la borne inférieure)*

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure (le plus grand réel minorant), noté $\inf(A)$.

$$\alpha = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \geq \alpha \\ \forall m \text{ minorant de } A, \alpha \geq m \end{cases}$$

Preuve

Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.
On pose $-A = \{-x, x \in A\}$. Donc $-A$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
Donc d'après l'axiome de la borne supérieure, $-A$ admet une borne supérieure, notée $\beta = \sup(-A)$.
On pose $\alpha = -\beta$.
Donc : $\forall x \in A, -x \leq \beta$, donc $\forall x \in A, x \geq -\beta = \alpha$.
Soit m un minorant de A. Donc : $\forall x \in A, x \geq m$, donc $\forall x \in A, -x \leq -m$.
Donc $-m$ est un majorant de $-A$. Donc : $\beta \leq -m$, donc $-\beta \geq m$, donc $\alpha \geq m$.
Donc α est le plus grand minorant de A. Donc $\alpha = \inf(A)$. ■

Remarque 1.1.0.3

Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Alors $\inf(A) = -\sup(-A)$.

Propriété 1.1.0.3 *(Caractérisation de la borne inférieure)*

Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Soit $\alpha = \inf(A)$ (1). Alors :

$$(2)\begin{cases}\forall a \in A : a \geq \alpha \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a_\epsilon \in A : a_\epsilon < \alpha + \varepsilon\end{cases} \iff (3)\begin{cases}(\text{caractérisation séquentielle})\forall a \in A : a \geq \alpha \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \to \alpha (n \to +\infty)\end{cases}$$

Preuve

On va montrer que (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3).
Pour cela, on va montrer que (1) $\implies$ (2), (2) $\implies$ (3) et (3) $\implies$ (1).

- (1) $\implies$ (2) :
  α est un minorant de A, donc $\forall a \in A : a \geq \alpha$.
  Donc : $\forall \varepsilon > 0 : \alpha + \epsilon > \alpha$. Or α est le plus grand minorant de A.
  Donc : $\alpha + \epsilon$ n'est pas un minorant de A, car α est le plus grand minorant de A.
  Donc : $\exists a_\epsilon \in A : a_\epsilon < \alpha + \varepsilon$.
- (2) $\implies$ (3) :
  Soit $\varepsilon = \frac{1}{n+1} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$.
  Donc : $\exists a_n \in A : \alpha < a_n < \alpha + \frac{1}{n+1}$.
  Donc : $\lim_{n\to+\infty} \alpha + \frac{1}{n+1} = \alpha$ et $lim_{n\to+\infty}\alpha = \alpha$, donc par gendarmes : $a_n \to \alpha(n \to +\infty)$.
- (3) $\implies$ (1) :
  Soit m un minorant de A. Or d'après (3), $\exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : a_n \to \alpha(n \to +\infty)$.
  Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq m$.
  Donc par passage à la limite : $\alpha \geq m$. Donc α est le plus grand minorant de A. Donc $\alpha = \inf(A)$.

■

Propriété 1.1.0.4

Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Si α est un minorant de A tel que $\alpha \in A$, alors $\alpha = \inf(A)$ et dans ce cas, α est appelé le **minimum** de A, noté $\min(A)$.

Remarque 1.1.0.4

$$\min(A) = \alpha \iff \begin{cases}\alpha \text{ minorant de } A \\ \alpha \in A\end{cases}$$

Exercice 1.1.0.2

Soit $A = \{(-1)^n \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Déterminer $\inf(A)$.

Solution : On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(-1)^n}{n} \leq 1$. Donc A est majorée par $M = 1$ (que n soit pair ou impair...).

On a aussi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(-1)^n}{n} \geq -1$. Donc A est minorée par $m = -1$.

Donc A est bornée.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} > -1$.

Or : $\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = 0$. Donc par la caractérisation spécifique de la borne inférieure, on en déduit que : $\inf(A) = -1$. En revanche, $-1 \notin A$, donc A n'admet pas de minimum.

Définition 1.1.0.2 *($\sup()$ et $\inf()$ pour des fonctions)*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle l'image de f l'ensemble $f(I) = \{f(x), x \in I\} \subset \mathbb{R}$.

- Si f est majorée, alors $f(I)$ est majorée et on note $\sup(f(I))$ la borne supérieure de l'ensemble image de f. On écrit aussi : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I : f(x) \leq M$.
- Si f est minorée, alors $f(I)$ est minorée et on note $\inf(f(I))$ la borne inférieure de l'ensemble image de f. On écrit aussi : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I : f(x) \geq m$.
- On peut écrire $\sup(f)$ ou $\sup_{x \in I} f(x)$ au lieu de $\sup(f(I))$ et $\inf(f)$ ou $\inf_{x \in I} f(x)$ au lieu de $\inf(f(I))$.

Exemple 1.1.0.3

Déterminer les bornes supérieures et inférieures des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ de $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ de $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$.

Solution :

1. On a : $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. Donc $f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$.
   On a aussi : $f'(x) > 0 \iff x \in]-1, 1[$ et $f'(x) < 0 \iff x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
   Donc f est croissante sur $]-1, 1[$ et décroissante sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
   Donc f admet un maximum en $x = 1$ et un minimum en $x = -1$, car $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \leq \frac{1}{2}$ et $f(x) \geq -\frac{1}{2}$.
   Donc : $\sup(f) = \max(f) = \frac{1}{2}$ et $\inf(f) = \min(f) = -\frac{1}{2}$.
2. On a : $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   Donc f admet un minimum en $x = 0$.
   On a : $f(0) = 0$.
   Donc : $\inf(f) = 0$.
   On a aussi : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Donc par la caractérisation spécifique de la borne supérieure, on en déduit que : $\sup(f) = 1$.

Remarque 1.1.0.5

Soient $f : D \mapsto \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- Si f est majorée, alors λf est majorée si $\lambda > 0$ et minorée si $\lambda < 0$.
  On a : $\sup(\lambda f) = \lambda \sup(f)$ si $\lambda > 0$ et $\inf(\lambda f) = \lambda \sup(f)$ si $\lambda < 0$.
- Si f est minorée, alors λf est minorée si $\lambda > 0$ et majorée si $\lambda < 0$.
  On a : $\inf(\lambda f) = \lambda \inf(f)$ si $\lambda > 0$ et $\sup(\lambda f) = \lambda \inf(f)$ si $\lambda < 0$.

Propriété 1.1.0.5

Soit $f : D \mapsto \mathbb{R}$ une fonction. Alors :

1. $\sup_{x \in D} f(x) \leq a \iff \forall x \in D, f(x) \leq a$.
2. $\inf_{x \in D} f(x) \geq b \iff \forall x \in D, f(x) \geq b$.

Preuve

1.

■

2 Valeur absolue d'un réel

Définition 2.2.0.3

Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{ou encore par : } |x| = \max(x, -x)$$

Propriété 2.2.0.6

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$ et $|x| = 0 \iff x = 0$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x| \cdot |y| = |xy|$.

Remarque 2.2.0.6

1. $|x| \leq 0 \iff x = 0$.
2. $|x|^2 = x^2$.
3. $\forall r \geq 0 : |x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$.

Exemple 2.2.0.4

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que : $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

Solution : (méthode 1)

On a : $|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |-y| = |x + y| + |y|$.

Donc : $|x| - |y| \leq |x + y|$.

De même, on a : $|y| = |y + x - x| \leq |y + x| + |-x| = |y + x| + |x|$.

Donc : $|y| - |x| \leq |y + x|$.

Donc : $-|x| + |y| \leq |x + y|$.

Donc : $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

Solution : (méthode 2)

On a : $|x + y| \leq |x| + |y| \implies |x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$.

Donc : $|x + y|^2 \leq x^2 + 2|xy| + y^2$.

Donc : $|x+y|^2 - (x^2+y^2) \leq 2|xy|$.
Donc : $|x+y|^2 - (x^2+y^2) + 2xy \leq 2|xy| + 2xy$.
Donc : $(x+y)^2 \leq 2(|xy|+xy)$.
Or : $|xy|+xy \geq 0$. Donc : $(x+y)^2 \leq (||x|-|y||)^2$.
Donc : $|x+y| \leq ||x|-|y||$. Montrer que : $|x-y| \geq ||x|-|y||$.
Solution : (suivre la même démarche en posant $y' = -y$)

Définition 2.2.0.4 *(x^+ et x^-)*

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit :

$$x^+ = \max(x,0) \quad \text{et} \quad x^- = \max(-x,0).$$

On a donc : $x = x^+ - x^-$.

Propriété 2.2.0.7

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $|x| = x^+ + x^-$.
2. $|x| = 2x^+ - x = x - 2x^-$.
3. $x^+ = \frac{x+|x|}{2}$ et $x^- = \frac{-x+|x|}{2}$.
4. $\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ et $\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.

Preuve

1. Si $x \geq 0$, alors $x^+ = x$ et $x^- = 0$. Donc $x^+ + x^- = x = |x|$.
   Si $x < 0$, alors $x^+ = 0$ et $x^- = -x$. Donc $x^+ + x^- = -x = |x|$.
2. On a : $|x| = x^+ + x^- = x^+ + (x^+ - x) = 2x^+ - x$. De même, on a : $|x| = x^+ + x^- = (x - x^-) + x^- = x - 2x^-$.
3. On a : $2x^+ = |x| + x$. Donc : $x^+ = \frac{x+|x|}{2}$. De même, on a : $2x^- = |x| - x$. Donc : $x^- = \frac{-x+|x|}{2}$.
4. On a : $\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$. En effet, si $x \geq y$, alors $\max(x,y) = x$ et $\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = x$. Si $x < y$, alors $\max(x,y) = y$ et $\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y-y+x}{2} = x$.
   On suit la même démarche pour $\min(x,y)$.

$\blacksquare$

Remarque 2.2.0.7

$\forall x,y \in \mathbb{R}, \max(x,y) = y + \max(x-y,0) = y + (x-y)^+$.

Propriété 2.2.0.8

Soient $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I (avec $I \subset \mathbb{R}$). Alors les fonctions $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont continues sur I.

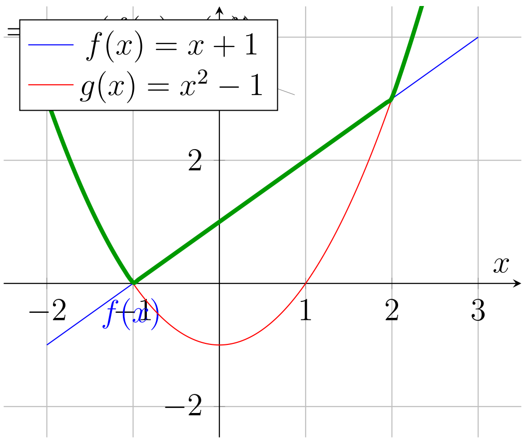

Figure 2.1 – La fonction $\max(f, g)$ (en vert) est continue si f et g le sont.

Preuve

Soit $x_0 \in I$. On veut montrer que $\max(f, g)$ est continue en x_0. Soit $\epsilon > 0$. On cherche $\delta > 0$ tel que :

$$|x - x_0| < \delta \implies |\max(f(x), g(x)) - \max(f(x_0), g(x_0))| < \epsilon.$$

On a :

$$|\max(f(x), g(x)) - \max(f(x_0), g(x_0))| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|.$$

Comme f et g sont continues en x_0, il existe $\delta_f > 0$ et $\delta_g > 0$ tels que :

$$|x - x_0| < \delta_f \implies |f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2},$$

$$|x - x_0| < \delta_g \implies |g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

On prend $\delta = \min(\delta_f, \delta_g)$. Alors, si $|x - x_0| < \delta$, on a :

$$|\max(f(x), g(x)) - \max(f(x_0), g(x_0))| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Donc $\max(f, g)$ est continue en x_0. De même, on montre que $\min(f, g)$ est continue en x_0. ■

Propriété 2.2.0.9

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0, a \leq \varepsilon$. Alors $a = 0$.

Preuve

Méthode 1 : Supposons que $a \geq 0$, on prend $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$. Donc $a \leq \frac{a}{2}$, ce qui est absurde.

Méthode 2 : On a $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon - a \geq 0$. Donc a est minorant sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc $\inf(\mathbb{R}_+^*) \iff 0 \geq a$, et comme $a \geq 0$, on en déduit que $a = 0$. ■

Conséquence 2.2.0.1

Soit $a, b \in \mathbb{C}$ tels que : $\forall \varepsilon > 0, |a - b| \leq \varepsilon$. Alors $a = b$.

3 Parties denses dans $\mathbb{R}$

3.1 Partie entière d'un réel

Définition 3.3.1.5

Soit $x \in \mathbb{R}$. La partie entière de x, notée $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
On peut aussi l'écrire : $E(x) = \max\{k \in \mathbb{Z}, k \leq x\}$.

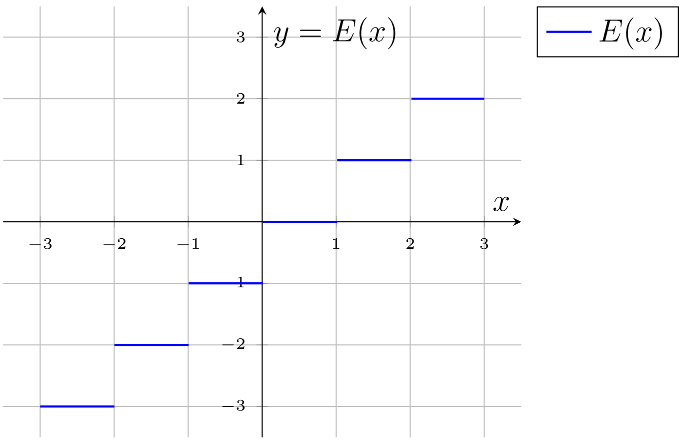

Figure 3.1 – Graphe de la fonction partie entière $f(x) = E(x)$.

Remarque 3.3.1.8

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

- $E(x) \leq x < E(x) + 1$.
- $x - 1 < E(x) \leq x$.
- $E(x) = n \iff n \leq x < n + 1$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
- $E(x) = n \iff x - n \in [0, 1[$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Propriété 3.3.1.10

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, E(x+m) = E(x) + m$. Cette application est croissante.
2. $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in [k, k+1[, E(x) = k$.
3. $\forall x \in \mathbb{R} : E(x) = x \iff x \in \mathbb{Z}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, E(x+k) = E(x) + k$.
5. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \begin{cases} E(x) \leq x < E(x) + 1 \\ E(y) \leq y < E(y) + 1 \end{cases}$
$$\Longrightarrow E(x) + E(y) \leq x + y < E(x) + E(y) + 2$$
$$\Longrightarrow E(x+y) \in \{E(x) + E(y), E(x) + E(y) + 1\}$$
$$\Longrightarrow E(x+y) = E(x) + E(y) + E(x + E(x) + y - E(y)).$$
6. $\forall a, b \in \mathbb{R} / b - a > 1 : \exists k \in \mathbb{Z}, a < k < b$.

Exercice 3.3.1.3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $E(-x) = -E(x)$. **Solution :**
Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $E(-x) = -E(x)$, car $E(x) = x$ et $E(-x) = -x$.
Donc $Z \subset S$.
Si $x \notin \mathbb{Z}$, alors $E(x) < x < E(x) + 1$. Donc $-E(x) - 1 < -x < -E(x)$. Donc $E(-x) = -E(x) - 1$.
Donc $x \notin S$.
Donc $S = \mathbb{Z}$.

3.2 Parties denses

Définition 3.3.2.6 *(Partie dense)*

Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque pour tout couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u < v$, il existe un élément $d \in \mathcal{D}$ tel que $u < d < v$.

Proposition 3.3.2.1

Les ensembles $\mathbb{Q}$ (nombres rationnels) et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (nombres irrationnels) sont denses dans $\mathbb{R}$.

Preuve *(Preuve de la densité de $\mathbb{Q}$)*

Soient $u, v \in \mathbb{R}$ avec $u < v$. On a donc $v - u > 0$. Par la propriété d'Archimède, il existe un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q > \frac{1}{v-u}$. Ceci implique que $q(v-u) > 1$, soit $qv > qu + 1$. Les réels qu et qv sont donc distants de plus de 1. Il existe donc un unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $qu < p \leq qu + 1$. On a alors $qu < p < qv$, et en divisant par q (qui est strictement positif), on obtient $u < \frac{p}{q} < v$. Nous avons trouvé un rationnel $\frac{p}{q}$ dans l'intervalle $]u, v[$, donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. ■

Preuve *(Preuve de la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)*

Soient $u, v \in \mathbb{R}$ avec $u < v$. On considère l'intervalle $]u - \sqrt{2}, v - \sqrt{2}[$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel $r \in \mathbb{Q}$ tel que $u - \sqrt{2} < r < v - \sqrt{2}$. En ajoutant $\sqrt{2}$, on obtient $u < r + \sqrt{2} < v$. Posons $d = r + \sqrt{2}$. Le nombre d est irrationnel. En effet, si d était rationnel, alors $d - r = \sqrt{2}$ serait aussi rationnel (comme différence de deux rationnels), ce qui est absurde. Nous avons trouvé un irrationnel d dans l'intervalle $]u, v[$, donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. ■

Proposition 3.3.2.2 *(Caractérisation séquentielle de la densité)*

Une partie $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(d_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}$ qui converge vers x.

$$\mathcal{D} \text{ dense} \iff \forall x \in \mathbb{R}, \exists (d_n)_n \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}} \text{ t.q. } \lim_{n \to +\infty} d_n = x$$

Preuve

($\Rightarrow$) Supposons $\mathcal{D}$ dense dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'intervalle $I_n =]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$. Puisque $\mathcal{D}$ est dense, il existe un élément $d_n \in \mathcal{D}$ dans cet intervalle. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x - \frac{1}{n} < d_n < x + \frac{1}{n}$$

Comme $\lim_{n\to\infty}(x-\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}(x+\frac{1}{n}) = x$, d'après le théorème des gendarmes, la suite $(d_n)_n$ converge vers x.

($\Leftarrow$) Supposons que pour tout réel x, il existe une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ qui converge vers x. Soient $u, v \in \mathbb{R}$ avec $u < v$. Posons $x = \frac{u+v}{2}$. Par hypothèse, il existe une suite $(d_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}$ qui converge vers x. Par définition de la convergence, pour $\varepsilon = \frac{v-u}{2} > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|d_n - x| < \varepsilon$. Ceci signifie que $x - \varepsilon < d_n < x + \varepsilon$. En remplaçant x et ε par leurs valeurs, on obtient :

$$\frac{u+v}{2} - \frac{v-u}{2} < d_n < \frac{u+v}{2} + \frac{v-u}{2} \implies u < d_n < v$$

Nous avons trouvé un élément de $\mathcal{D}$ dans l'intervalle $]u, v[$, donc $\mathcal{D}$ est dense. ■

Exemple 3.3.2.5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(d_n)_n$ définie par $d_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ est une suite de nombres rationnels qui converge vers x. En effet, on a l'encadrement $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$, d'où $x - \frac{1}{n} < d_n \leq x$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to\infty} d_n = x$.

3.3 Applications de la densité

Théorème 3.3.3.3 *(Égalité de deux fonctions continues)*

Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{D}$ une partie dense de $\mathbb{R}$. Si f et g coïncident sur $\mathcal{D}$ (c'est-à-dire $\forall x \in \mathcal{D}, f(x) = g(x)$), alors f et g sont égales sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Preuve

Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(d_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}$ qui converge vers x. Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(d_n) = g(d_n)$. Comme les fonctions f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, on peut utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité :

$$\lim_{n\to\infty} f(d_n) = f(\lim_{n\to\infty} d_n) = f(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} g(d_n) = g(\lim_{n\to\infty} d_n) = g(x)$$

Puisque les suites $(f(d_n))_n$ et $(g(d_n))_n$ sont égales, elles ont la même limite. Par unicité de la limite, on a donc $f(x) = g(x)$. Ceci étant vrai pour n'importe quel $x \in \mathbb{R}$, on conclut que $f = g$. ■

Exercice 3.3.3.4

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)\sin(x) = 0$. Montrer que $f \equiv 0$.
- Déterminer l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$ (*Equation de Cauchy*).

Solution :

- On pose $D = \{x \in \mathbb{R}, \sin(x) \neq 0\}$. Donc $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$. On utilise la caractérisation séquentielle de la densité dans $\mathbb{R}$. On pose a_n une suite définie telle que $\begin{cases} a_n = x \text{ si } x \in D \\ a_n = k\pi + \frac{1}{n} \text{ sinon, avec } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } k\pi = x \text{ et } k\pi < k\pi + \frac{1}{n} < (k+1)\pi \end{cases}$